Popis zobrazení pomocí fuzzy logiky

diplomová práce

Ján Fröhlich

KM, FJFI, ČVUT

23. dubna 2009

Obsah

1. Úvod
   - Základy fuzzy logiky
   - Popis zobrazení pomocí fuzzy logiky
   - Fuzzy logika v širším smyslu
   - Cíle práce
   - Aproximace zobrazení
2. Výsledky
   - Po částech lineární regrese
   - Příklad: funkce jedné nezávislé proměnné
   - Aproximace nelineárních zobrazení
   - Konstrukce tvrzení Lukasiewiczovy logiky
3. Závěr

Fuzzy logika

Uvažování o *částečně pravdivých výrocích*

- rozšíření spojek, standardní algebra na $[0, 1]$,
- modus ponens, axiomy, bezespornost, úplnost, . . . ,
- popis zobrazení: $e_{\mathcal{A}}(\varphi) = f(e_{\mathcal{A}}(v_1), \ldots, e_{\mathcal{A}}(v_k))$

Konjunkce t-normy

binární operace t-norma $\mathbf{t} : [0,1]^2 \to [0,1]$:

1. komutativita
$$x \,\mathbf{t}\, y = y \,\mathbf{t}\, x,$$
2. asociativita
$$x \,\mathbf{t}\, (y \,\mathbf{t}\, z) = (x \,\mathbf{t}\, y) \,\mathbf{t}\, z,$$
3. monotonie
$$x \leq y \quad \text{implikuje} \quad x \,\mathbf{t}\, z \leq y \,\mathbf{t}\, z,$$
4. omezení shora
$$1 \,\mathbf{t}\, x = x.$$

Implikace a reziduum t-normy

- pravidlo *modus ponens* $(\varphi \,\&\, (\varphi \to \psi)) \to \psi$
- požaduje se:
  - $x \Rightarrow_{\mathbf{t}} y = 1$ právě tehdy, když $x \leq y$,
  - pravidlo modus ponens je tautologie
- pravdivost závěru ψ je zdola omezena pravdivostí předpokladu, tj. stupněm *současné* pravdivosti výroků φ a $\varphi \to \psi$,
- při interpretaci *konjunkce* v předpokladu t-normou $\mathbf{t}$:

$$(x \,\mathbf{t}\, (x \Rightarrow_{\mathbf{t}} y)) \leq y,$$

- reziduum $\Rightarrow_{\mathbf{t}}$ t-normy $\mathbf{t}$ je funkce $\Rightarrow_{\mathbf{t}}: [0,1]^2 \to [0,1]$:

$$x \Rightarrow_{\mathbf{t}} y = \sup\{z \mid x \,\mathbf{t}\, z \leq y\}.$$

Lukasiewiczova logika

Interpretace spojek

- $x \otimes y := 0 \vee (x + y - 1)$,
- $x \Rightarrow_{\otimes} y := 1 \wedge (1 - x + y)$,

Reprezentace funkcí

- $\underline{(0,8 \oplus 0,7)} \ominus 0,6 = \underline{1} \ominus 0,6 = 0,4 \neq \underline{1,5} - 0,6 = 0,9$,
- $0,8 \oplus (0,7 \ominus 0,6) = 0,8 \oplus 0,1 = 0,9 = 0,8 + 0,1 = 0,9$,
- po částech lineární funkce s celočíselnými koeficienty,
- reprezentace funkce f: $\Phi = \bigvee_{i \in \hat{p}} \left(\Phi_{h_i} \,\&\, \bigwedge_{j \in \hat{q}_i} \neg \Psi_{g_{i,j}}^{\oplus m_{i,j}} \right)$

Lukasiewiczova logika

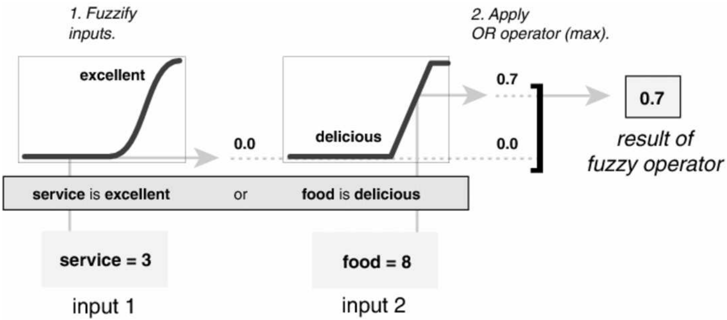
Interpretace spojek

- $x \otimes y := 0 \vee (x + y - 1)$,
- $x \Rightarrow_{\otimes} y := 1 \wedge (1 - x + y)$,

Reprezentace funkcí

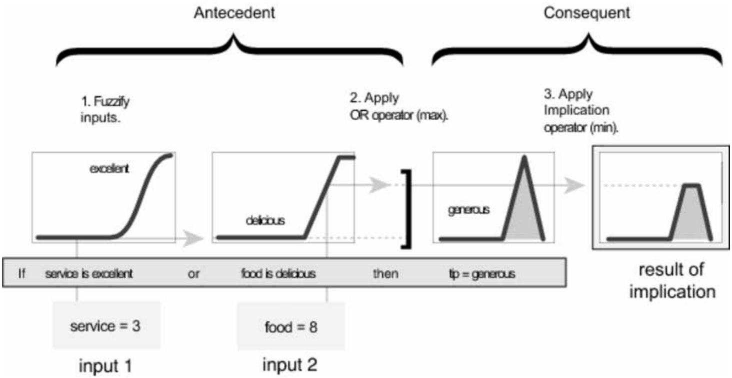
- $\underline{(0,8 \oplus 0,7)} \ominus 0,6 = \underline{1} \ominus 0,6 = 0,4 \neq \underline{1,5} - 0,6 = 0,9$,
- $0,8 \oplus (0,7 \ominus 0,6) = 0,8 \oplus 0,1 = 0,9 = 0,8 + 0,1 = 0,9$,
- po částech lineární funkce s celočíselnými koeficienty,
- reprezentace funkce f: $\Phi = \bigvee_{i \in \hat{p}} \left(\Phi_{h_i} \,\&\, \bigwedge_{j \in \hat{q}_i} \neg \Psi_{g_{i,j}}^{\oplus m_{i,j}} \right)$

Fuzzifikace vstupů

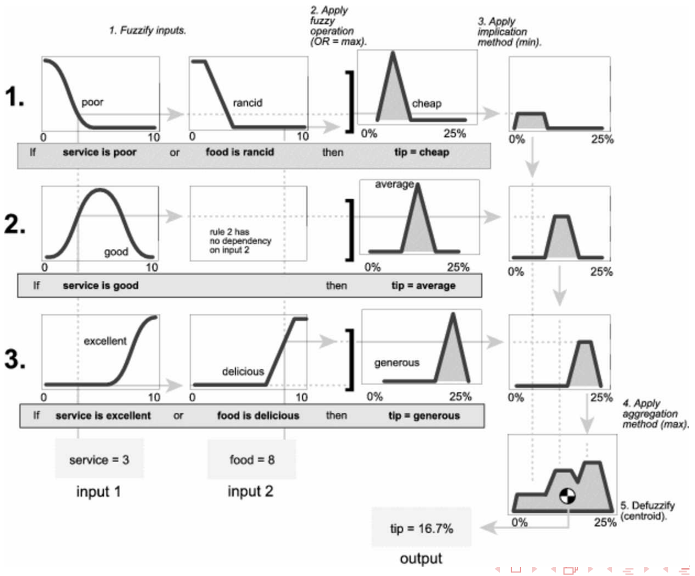


http://www.mathworks.com/products/fuzzylogic/

Fuzzy usuzování



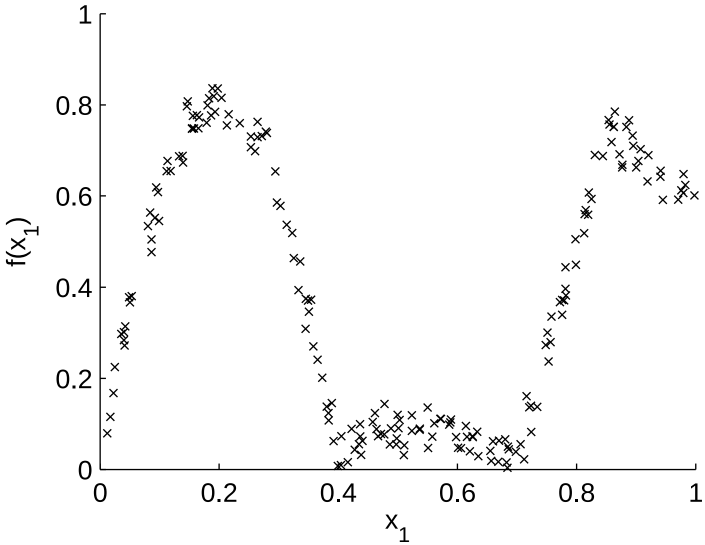
Fuzzy odvozování a defuzifikace



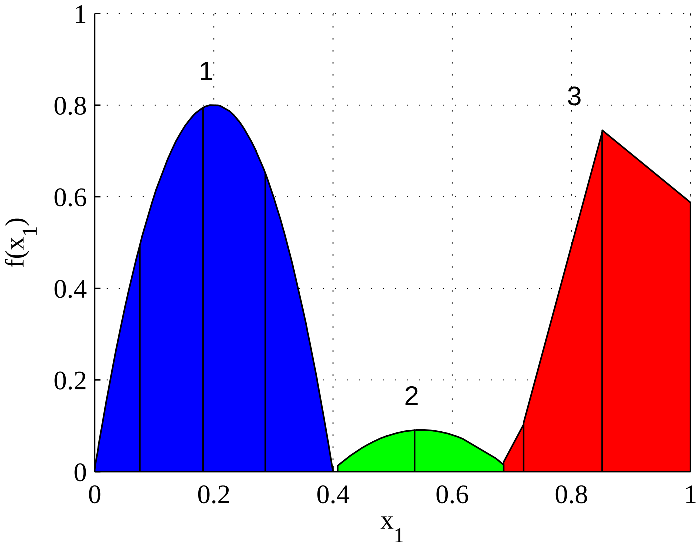
Úkoly

1. Implementovat algoritmus pro převod zobrazení na tvrzení
2. Aproximace dat a popis zobrazení fuzzy logice:
   - srozumitelnost tvrzení vs. přesnost reprezentace,
   - výroková vs. predikátová fuzzy logika,
   - efektivita pro velké soubor dat a vyšší dimenze
3. Navrhnout a implementovat algoritmy v MATLABu

Cíl: zadané body



Cíl: výsledná aproximace



Volba vhodného způsobu aproximace

Otázka srozumitelnosti

- přímá úměrnost,
- lineární kombinace,
- nelineární závislost: součin dvou proměnných,
- oblast linearity — konvexní mnohostěn

Některé známé metody aproximace

- umělé neuronové sítě (ANN),
- metoda opěrných bodů (SVM),
- genetické algoritmy

Volba vhodného způsobu aproximace

Otázka srozumitelnosti

- přímá úměrnost,
- lineární kombinace,
- nelineární závislost: součin dvou proměnných,
- oblast linearity — konvexní mnohostěn

Některé známé metody aproximace

- umělé neuronové sítě (ANN),
- metoda opěrných bodů (SVM),
- genetické algoritmy

Evoluční algoritmy a po částech lineární regrese

- prohledávání prostoru řešení
- jedinec, populace, *ohodnocovací funkce*, *selekce*, *mutace*, *křížení*, *reprodukce*
- predikátová nebo výroková logika
- hledat přímo tvrzení nebo funkci
- vstup: aproximace nebo soubor dat
- kritéria optimalizace, konvergence populace
- efektivita

Navržený postup

Hledá se $f : [0,1]^k \to [0,1]$. Zadáno n bodů: $\mathbf{x}_i \in [0,1]^k$, $y_i \in [0,1]$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

1. Sestaví se kd-trie.
2. Provede se lineární regrese bodů v buňkách.
3. Rozliší se *nosné* a *hraniční* buňky.

úspěšnost proložení

koeficient určení: $R^2 = \frac{\text{součet čtverců modelových hodnot}}{\text{celkový součet čtverců}} \in [0,1]$

4. Sloučí se buňky se stejnou závislostí (testování lineárních hypotéz).

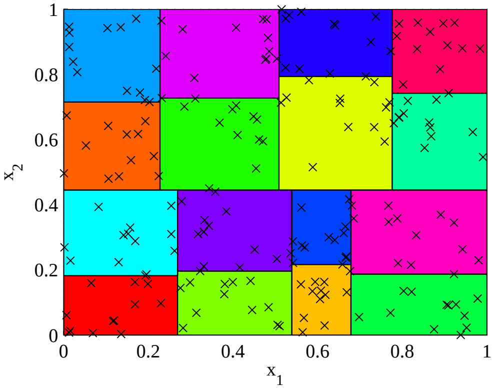
největší možné konvexní oblasti

míra konvexnosti: $\gamma = \frac{\text{součet objemů sloučených buněk}}{\text{objem konvexního obalu vrcholů buňky}} \in (0,1]$

Navržený postup

Hledá se $f : [0,1]^k \to [0,1]$. Zadáno n bodů: $\mathbf{x}_i \in [0,1]^k$, $y_i \in [0,1]$, $i \in \{1,\ldots,n\}$.

1. Sestaví se kd-trie. Příklad — dvě nezávislé proměnné:



Navržený postup

Hledá se $f : [0,1]^k \to [0,1]$. Zadáno n bodů: $\mathbf{x}_i \in [0,1]^k$, $y_i \in [0,1]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$.

1. Sestaví se kd-trie.
2. Provede se lineární regrese bodů v buňkách.
3. Rozliší se *nosné* a *hraniční* buňky.

úspěšnost proložení

koeficient určení: $R^2 = \frac{\text{součet čtverců modelových hodnot}}{\text{celkový součet čtverců}} \in [0,1]$

4. Sloučí se buňky se stejnou závislostí (testování lineárních hypotéz).

největší možné konvexní oblasti

míra konvexnosti: $\gamma = \frac{\text{součet objemů sloučených buněk}}{\text{objem konvexního obalu vrcholů buňky}} \in (0,1]$

Navržený postup

Hledá se $f : [0,1]^k \to [0,1]$. Zadáno n bodů: $\mathbf{x}_i \in [0,1]^k$, $y_i \in [0,1]$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

1. Sestaví se kd-trie.
2. Provede se lineární regrese bodů v buňkách.
3. Rozliší se *nosné* a *hraniční* buňky.

úspěšnost proložení

koeficient určení: $R^2 = \dfrac{\text{součet čtverců modelových hodnot}}{\text{celkový součet čtverců}} \in [0,1]$

4. Sloučí se buňky se stejnou závislostí (testování lineárních hypotéz).

největší možné konvexní oblasti

míra konvexnosti: $\gamma = \dfrac{\text{součet objemů sloučených buněk}}{\text{objem konvexního obalu vrcholů buňky}} \in (0,1]$

Navržený postup

Hledá se $f : [0,1]^k \to [0,1]$. Zadáno n bodů: $\mathbf{x}_i \in [0,1]^k$, $y_i \in [0,1]$, $i \in \{1,\dots,n\}$.

1. Sestaví se kd-trie.
2. Provede se lineární regrese bodů v buňkách.
3. Rozliší se *nosné* a *hraniční* buňky.

úspěšnost proložení

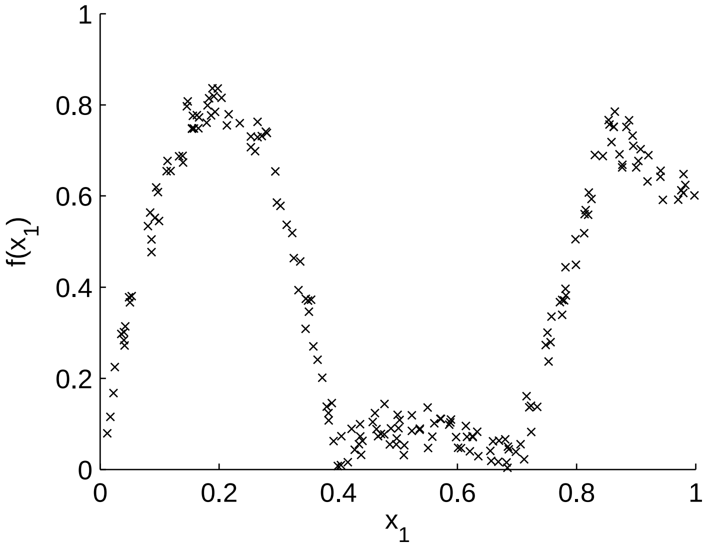
koeficient určení: $R^2 = \dfrac{\text{součet čtverců modelových hodnot}}{\text{celkový součet čtverců}} \in [0,1]$

4. Sloučí se buňky se stejnou závislostí (testování lineárních hypotéz).

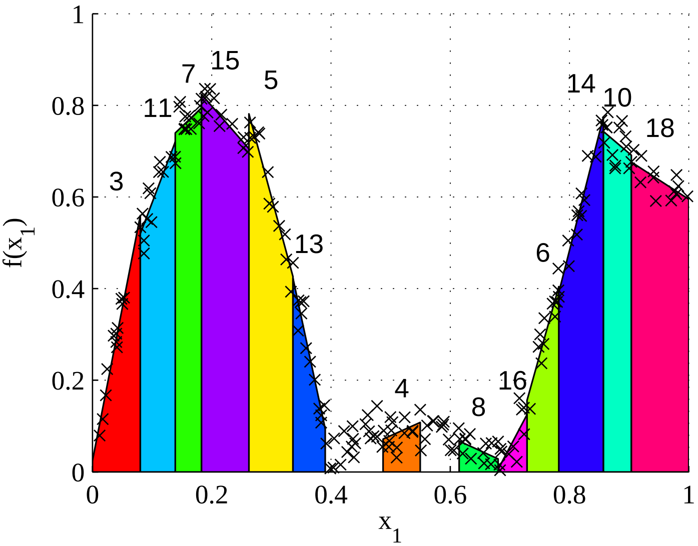
největší možné konvexní oblasti

míra konvexnosti: $\gamma = \dfrac{\text{součet objemů sloučených buněk}}{\text{objem konvexního obalu vrcholů buňky}} \in (0,1]$

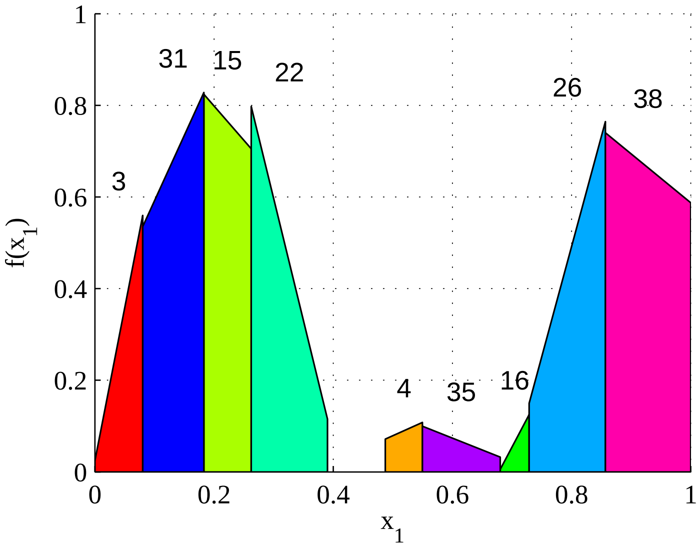
Zadané body



*k*d-trie, lineární regrese

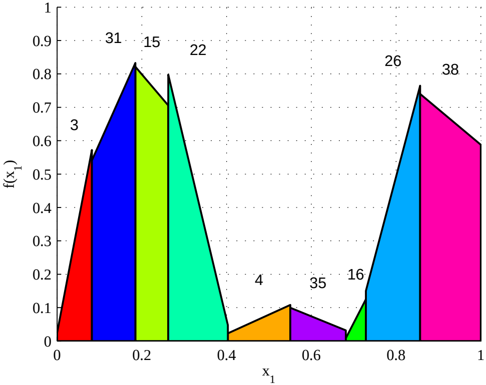


Sloučení buněk se stejnou závislostí



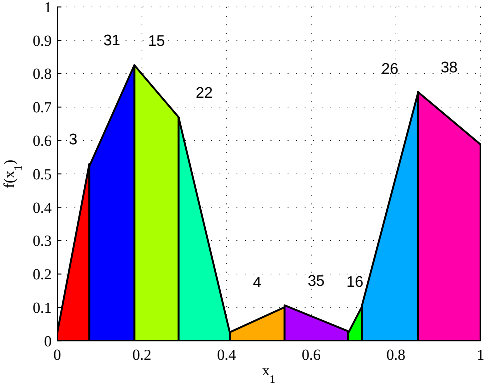
Nalezení oblastí linearity (klasifikace)

1. Lineární klasifikací se určí nadroviny oddělující sousední buňky.
2. Pomocí nalezených nadrovin se sestrojí konvexní mnohostěny.



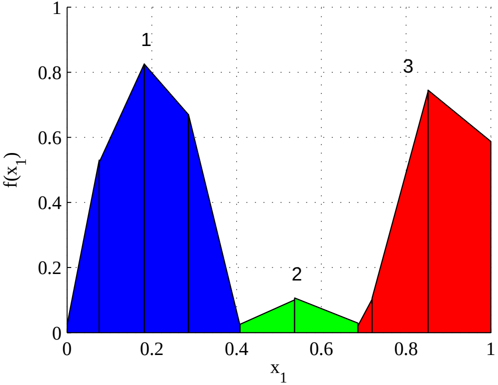
Nalezení oblastí linearity (průsečíky)

1. Určí se průsečíky nadrovin sousedních buněk.
2. Průsečíky se promítnou do prostoru nezávislých proměnných.



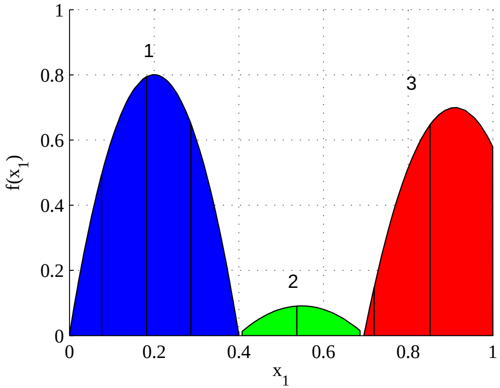
Hledání oblastí extrémů

1. Naleznou se lokální maxima.
2. V každé oblasti maxima se provede kvadratická regrese.

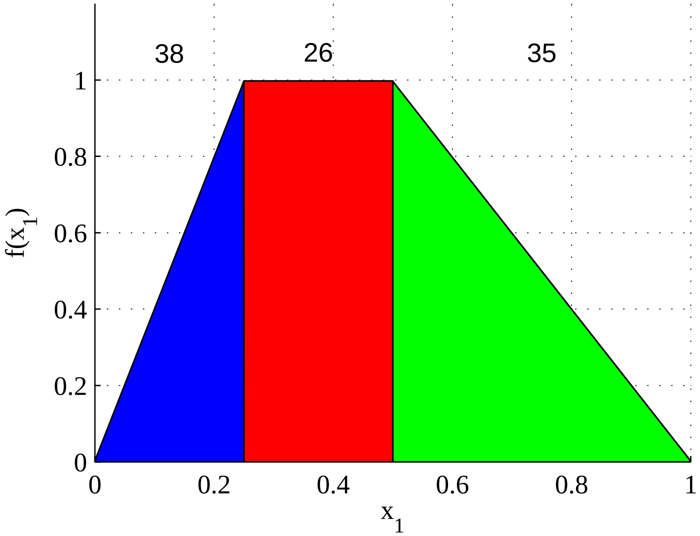


Hledání oblastí extrémů

1. Naleznou se lokální maxima.
2. V každé oblasti maxima se provede kvadratická regrese.



Příklad: po částech lineární funkce ...



... reprezentace funkce v Lukasiewiczově logice

$$
\begin{aligned}
&\Big((\tfrac{1}{2} \oplus \tfrac{1}{10} \ominus \tfrac{1}{2}) \ \& \\
&\qquad \Big(\neg (\tfrac{1}{2} \ominus \tfrac{1}{10} \oplus \varphi \ominus \tfrac{1}{2})^{\oplus 2} \wedge \\
&\qquad \neg (\tfrac{1}{2} \ominus \varphi \ominus \tfrac{1}{2})^{\oplus 4} \Big) \Big) \\
&\vee \\
&\Big((\tfrac{1}{2} \oplus \tfrac{3}{10} \ominus \varphi^{\oplus 2} \ominus \tfrac{1}{2}) \ \& \\
&\qquad \Big(\neg (\tfrac{1}{2} \ominus \tfrac{1}{10} \oplus \varphi \ominus \tfrac{1}{2}) \wedge \\
&\qquad \neg (\tfrac{1}{2} \oplus \tfrac{1}{10} \ominus \varphi \ominus \tfrac{1}{2})^{\oplus 8} \Big) \Big) \\
&\vee \\
&\Big((\tfrac{1}{2} \oplus \varphi^{\oplus 4} \ominus \tfrac{1}{2}) \ \& \\
&\qquad \Big(\neg (\tfrac{1}{2} \oplus \varphi \ominus \tfrac{1}{2})^{\oplus 16} \wedge \\
&\qquad \neg (\tfrac{1}{2} \ominus \varphi \ominus \tfrac{1}{2}) \Big) \Big)
\end{aligned}
$$

Závěr

Vlastnosti navržených algoritmů:

- jednoduché nastavení úrovně aproximace,
- oblasti linearity — konvexní mnohostěny,
- umožní nalézt spojitou po částech lineární aproximaci,
- snadné nalezení lokálních extrémů,
- regrese v oblastech extrémů usnadní konstrukci predikátů,
- využívá lineární metody.

Děkuji za pozornost.